geometrischer und kinematischer Gestalt unterscheiden; eine Aussage geometrischen Inhaltes betrifft die kinematische bezw. geometrische Gestalt, je nachdem dieselbe auf ein Bezugssystem S bezogen ist oder nicht.

§ 3. Koordinaten-Zeit-Transformation.

S und S' seien gleichwertige Bezugssysteme, d.h. diese Systeme mögen gleichlange Einheitsmaßstäbe und gleichlaufende Uhren besitzen, falls diese Gegenstände im Zustande relativer Ruhe miteinander verglichen werden. Es ist dann einleuchtend, daß jedes Naturgesetz, das in bezug auf S gilt, in genau gleicher Form auch in bezug auf S' gilt, falls S und S' relativ zueinander ruhen. Das Relativitätsprinzip verlangt jene vollkommene Übereinstimmung auch für den Fall, daß S' relativ zu S in gleichförmiger Translationsbewegung begriffen ist. Im speziellen muß sich also für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum in bezug auf beide Bezugssysteme dieselbe Zahl ergeben.

Ein Punktereignis sei relativ zu S durch die Variabeln x, y, z, t relativ zu S' durch die Variabeln x', y', z', t', bestimmt, wobei S und S' beschleunigungsfrei und relativ zueinander bewegt seien. Wir fragen nach den Gleichungen, welche zwischen den erstgenannten und den letztgenannten Variabeln bestehen.

Von diesen Gleichungen können wir sofort aussagen, daß sie in bezug auf die genannten Variabeln linear sein müssen, weil die Homogenitätseigenschaften des Raumes und der Zeit dies erfordern. Daraus folgt im speziellen, daß die Koordinatenebenen von S' — auf das Bezugssystem S bezogen — gleichförmig bewegte Ebenen sind; doch werden diese Ebenen im allgemeinen nicht aufeinander senkrecht stehen. Wählen wir jedoch die Lage der x'-Achse so, daß letztere — auf S bezogen — die gleiche Richtung hat, wie die auf S bezogene Translationsbewegung von S', so folgt aus Symmetriegründen, daß die auf S bezogenen Koordinatenebenen von S' aufeinander senkrecht stehen müssen. Wir können und wollen die Lagen der beiden Koordinatensysteme im speziellen so wählen, daß die x-Achse von S und die x'-Achse von S' dauernd zusammenfallen und daß die auf S bezogene y'-Achse von S' parallel der y-Achse von S ist. Ferner wollen wir als Anfangspunkt der Zeit in beiden Systemen den Augenblick wählen, in welchem die Koordinatenanfangspunkte koinzidieren; dann sind die gesuchten linearen Transformationsgleichungen homogen.

Aus der nun bekannten Lage der Koordinatenebenen von S' relativ zu S schließen wir unmittelbar, daß je zwei der folgenden Gleichungen gleichbedeutend sind:

$$x' = 0 \quad \text{und} \quad x - vt = 0$$
$$y' = 0 \quad \text{und} \quad y = 0$$
$$z' = 0 \quad \text{und} \quad z = 0$$

Drei der gesuchten Transformationsgleichungen sind also von der Form:

$$\begin{aligned} x' &= a(x - vt) \\ y' &= by \\ z' &= cz\,. \end{aligned}$$

Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume in bezug auf beide Bezugssysteme gleich c ist, so müssen die beiden Gleichungen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

und

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$$

gleichbedeutend sein. Hieraus und aus den soeben für x', y', z' gefundenen Ausdrücken schließt man nach einfacher Rechnung, daß die gesuchten Transformationsgleichungen von der Form sein müssen:

$$\begin{aligned} t' &= \varphi(v) \cdot \beta \cdot \left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ x' &= \varphi(v) \cdot \beta \cdot (x - vt) \\ y' &= \varphi(v) \cdot y \\ z' &= \varphi(v) \cdot z\,. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

gesetzt.

Die noch unbestimmt gebliebene Funktion von v wollen wir nun bestimmen. Führen wir ein drittes mit S und S' gleichwertiges Bezugssystem S'' ein, welches relativ zu S' mit der Geschwindigkeit $-v$ bewegt und ebenso relativ zu S' orientiert ist, wie S' relativ zu S, so erhalten wir durch zweimalige Anwendung der eben erlangten Gleichungen

$$\begin{aligned} t'' &= \varphi(v) \cdot \varphi(-v) \cdot t \\ x'' &= \varphi(v) \cdot \varphi(-v) \cdot x \\ y'' &= \varphi(v) \cdot \varphi(-v) \cdot y \\ z'' &= \varphi(v) \cdot \varphi(-v) \cdot z\,. \end{aligned}$$

Da die Koordinatenanfangspunkte von S und S'' dauernd zusammenfallen, die Achsen gleich orientiert und die Systeme „gleichwertige“ sind, so ist diese Substitution die identische [1]), so daß

$$\varphi(v) \cdot \varphi(-v) = 1 .$$

Da ferner die Beziehung zwischen y und y' vom Vorzeichen von v nicht abhängen kann, ist,

$$\varphi(v) = \varphi(-v) .$$

Es ist also [2]) $\varphi(v) = 1$, und die Transformationsgleichungen lauten

$$\left.\begin{aligned} t' &= \beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ x' &= \beta(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wobei

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

Löst man die Gleichungen (1) nach x, y, z, t auf, so erhält man die nämlichen Gleichungen, nur daß die „gestrichenen“ durch die gleichnamigen „ungestrichenen“ Größen und umgekehrt ersetzt sind, und v durch $-v$ ersetzt ist. Es folgt dies auch unmittelbar aus dem Relativitätsprinzip und aus der Erwägung, daß S relativ zu S' eine Paralleltranslation in Richtung der X'-Achse mit der Geschwindigkeit $-v$ ausführt.

Allgemein erhält man gemäß dem Relativitätsprinzip aus jeder richtigen Beziehung zwischen „gestrichenen“ (mit Bezug auf S' definierten) und „ungestrichenen“ (mit Bezug auf S definierten) Größen oder zwischen Größen nur einer dieser Gattungen wieder eine richtige Beziehung, wenn man die ungestrichenen durch die entsprechenden gestrichenen Zeichen und umgekehrt sowie v durch $-v$ ersetzt.

§ 4. Folgerungen aus den Transformationsgleichungen, starre Körper und Uhren betreffend.

1. Relativ zu S' ruhe ein Körper. x_1', y_1', z_1' und x_2', y_2', z_2' seien die auf S' bezogenen Koordinaten zweier materieller Punkte desselben. Zwischen den Koordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, x_2 dieser Punkte in

---

1) Dieser Schluß ist auf die physikalische Voraussetzung gegründet, daß die Länge eines Maßstabes, sowie die Ganggeschwindigkeit einer Uhr dadurch keine dauernde Änderung erleiden, daß diese Gegenstände in Bewegung gesetzt und wieder zur Ruhe gebracht werden.

2) $\varphi(v) = -1$ kommt offenbar nicht in Betracht.